ediciones sm

Transformaciones geométricas y funciones

1. Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Una función tiene que ser necesariamente par o impar.

b) Si el dominio de f es $[0, +\infty)$, entonces f no puede ser par.

c) Una función que tiene un eje de simetría es necesariamente par.

d) La función $f(x) = 0$ es par e impar a la vez.

e) Si $f(x)$ es una función par, entonces $-f(x)$ es impar.

2. Estudia el tipo de simetría que tiene la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } |x| \geqslant 3 \\ 8 & \text{si } x \in (-3, 3) \end{cases}$$

3. Sea $f(x)$ una función par. ¿Cómo es, si existe, la función definida $y = \dfrac{1}{f(x)}$?

4. ¿Cuál es la función simétrica de $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$ respecto al eje de ordenadas?

5. ¿Cuál es el eje de simetría de la función $f(x) = x^2 + 2x - 15$?

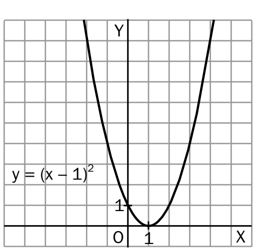
6. Considera la función $f(x) = \dfrac{3}{x}$.

a) Halla la expresión algebraica de la función que resulta al trasladarla oblicuamente según el vector $\vec{v} = (1, 1)$.

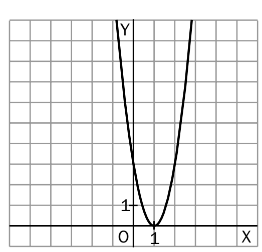
b) Al ser f una función impar, tiene su centro de simetría en el punto O(0, 0). ¿Es impar la función trasladada? ¿Tendrá la función trasladada centro de simetría? ¿En qué punto?

7. Si quieres que la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 + 1$ se transforme en la gráfica de la función $g(x) = \dfrac{3x^2}{2} + 3$, ¿qué escala de dilatación debes aplicar en cada eje?

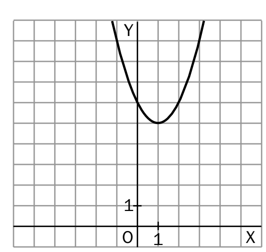
8. La primera gráfica representa la función $f(x) = (x - 1)^2$. Escribe a partir de ella la expresión algebraica de las funciones representadas en los apartados a, b y c.



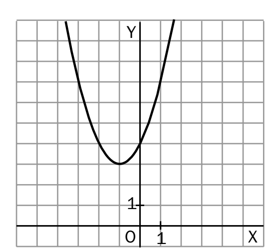
a)



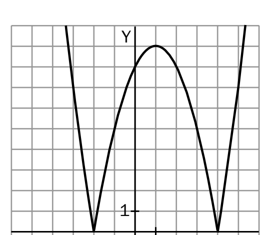
b)



c)



9. La siguiente gráfica representa el valor absoluto de una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Calcula los valores de a, b y c.



SOLUCIONES

1. a) Falso. La función $f(x) = x^2 + x$ no es ni par ni impar.

b) Verdadero. Si $D(f) = [0, +\infty)$, entonces $f(-x)$ no tiene sentido para $x > 0$ y, por tanto, no puede cumplirse que $f(x) = f(-x)$, es decir, f no puede ser par.

c) Falso. La función $f(x) = x^2 - 6x + 8$ tiene como eje de simetría el eje de la parábola y no es par.

d) Verdadero. $f(x) = 0 = f(-x)$.

e) Falso. $f(x) = |x|$ es par y, sin embargo, $-f(x)$ no es impar.

2. Se estudia la simetría en cada trozo:

$$f(-x) = \begin{cases} (-x)^2 - 1 & \text{si } |x| \geqslant 3 \\ 8 & \text{si } x \in (-3, 3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(-x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } |x| \geqslant 3 \\ 8 & \text{si } x \in (-3, 3) \end{cases}$$

Solución: f es par, pues $f(x) = f(-x)$.

3. $\dfrac{1}{f(-x)} = \dfrac{1}{f(x)}$, pues $f(x) = f(-x)$.

Por tanto, $y = \dfrac{1}{f(x)}$ es par.

4. $g(x) = f(-x) = -x^3 - 2x^2 - x - 5$

5. Por tratarse de una parábola, el eje de simetría es el eje de la parábola. Como las raíces de la función son $x = 3$ y $x = -5$, se tiene que $x = -1$ es el eje de simetría de la función, pues $x = -1$ es el punto medio del intervalo $[-5, 3]$.

6. a) $g(x) = f(x - 1) + 1 = \dfrac{3}{x - 1} + 1 =$

$= \dfrac{3 + x - 1}{x - 1} = \dfrac{x + 2}{x - 1}$

b) $g(-x) \neq -g(x)$; por tanto, $g(x)$ no es impar. Sin embargo, $g(x)$ tiene como centro de simetría el trasladado del origen, esto es, $C(1, 1)$.

7. Por ser una dilatación, $g(x)$ es de la forma:

$g(x) = k\, f\left(\dfrac{x}{m}\right) = \dfrac{2kx^2}{m^2} + k$

Hay que resolver: $\dfrac{2kx^2}{m^2} + k = \dfrac{3x^2}{2} + 3$

Igualando coeficientes se obtiene que $k = 3$ y $m = \pm 2$. Se toma sólo la solución positiva de m, por la naturaleza de las transformaciones.

Solución: La dilatación oblicua es según la escala $x = 200\ \%$, $y = 300\ \%$.

8. a) $f(x) = 3(x - 1)^2$

b) $f(x) = (x - 1)^2 + 5$

c) $f(x) = (x - 1 + 2)^2 + 3 = (x + 1)^2 + 3$

9. Los puntos $(-2, 0)$ y $(4, 0)$ pertenecen a la gráfica de la función. Además, $|f(0)| = 8$; por tanto:

$$\begin{cases} f(-2) = 4a - 2b + c = 0 \\ f(4) = 16a + 4b + c = 0 \\ |f(0)| = |c| = \pm c = 8 \end{cases} \Rightarrow$$

$a = -1;\ b = 2;\ c = 8$ o $a = 1;\ b = -2:\ c = -8$

Según c sea -8 u 8 se obtiene $f(x) = x^2 - 2x - 8$ o $f(x) = -x^2 + 2x + 8$, respectivamente.

Nótese que las dos posibles soluciones corresponden a funciones opuestas y, por tanto, ambas tienen la misma función valor absoluto.